

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig

Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 174 (M 62)

Een toets tegen kettingcorrelatie bij
toepassing van regressiemethoden bij tijdreeksen

Verslag van een colloquiumvoordracht over een
artikel van J. DURBIN en G.S. WATSON (Biometrika, 1950 en 1951)

door

Gerda Klerk-Grobbe

Juli 1955

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Inhoud

Summary

1. Inleiding
2. Begrippen uit de matrixtheorie en het onderscheidingsvermogen van een toets
3. Toegelaten hypothesen en toetsingsgrootheid
4. Waarschijnlijkheidsverdeling van de toetsingsgrootheid onder de nulhypothese
5. Gebruik van de tabellen
6. Een voorbeeld
7. Benadering voor de verdeling van de toetsingsgrootheid
8. Opmerking

Literatuur

Tabellen

1. Inleiding

1.1. Bij de regressieanalyse is de methode der kleinste kwadrate[n] in algemeen gebruik voor het schatten van onbekende regressiecoëfficiënten. Deze schattingen bezitten gunstige eigenschappen mits enkele onderstellingen betreffende de waarnemingen vervuld zijn. Wij beschouwen het volgende lineaire regressiemodel:

$$(1;1) \quad y = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + \underline{v} \quad (1),$$

hierin zijn $x_1, \dots, x_k$ de onafhankelijke variabelen welke wij als niet-stochastisch beschouwen; y is de afhankelijke, wèl stochastische, variabele, $\beta_1, \dots, \beta_k$ zijn de onbekende regressiecoëfficiënten en $\underline{v}$ vertegenwoordigt het stochastische deel van y (in 't Engels wordt dit met "error" aangeduid). Voor de grootheden y en $x_1, \dots, x_k$ worden waarnemingen verricht. Dit waarnemingsmateriaal ziet er dus als volgt uit:

$$(1;2) \quad \begin{array}{ccccccc} y_1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ y_n & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{kn} & & \end{array} \quad (k < n),$$

waarbij steeds de waarden van y en $x_1, \dots, x_k$ op één regel bij elkaar behoren volgens de betrekkingen (1;1), hetgeen wij dus ook als volgt kunnen noteren:

$$(1;2) \quad y_i = \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \underline{v}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

terwijl y_i de door y aangenomen waarden zijn. De waarden van $\beta_1, \dots, \beta_k$ en de door $\underline{v}_i$ aangenomen waarden zijn onbekend; voor $\beta_1, \dots, \beta_k$ worden schattingen gevraagd.

1.2. De onderstellingen waar wij in het begin van deze paragraaf op doelden hebben nu betrekking op de grootheden $\underline{v}_i$ en hun waarschijnlijkheidsverdeling. Zij luiden:

- a) De waarschijnlijkheidsverdeling van $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ hangt niet van de waarden van $x_{11}, \dots, x_{kn}$ af en iedere $\underline{v}_i$ heeft verwachting nul: $E \underline{v}_i = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Deze onderstelling maakt het mogelijk om, indien wij meest aannemelijke schattingen ²⁾ en λ -toetsen ³⁾ gebruiken, hierbij de -----

- 1) Stochastische grootheden, dus grootheden die een waarschijnlijkheidsverdeling bezitten, worden met onderstreepte letters aangegeven. DURBIN en WATSON gebruiken het symbool ε in plaats van $\underline{v}$.
- 2) Engels: maximum likelihood estimates.
- 3) Engels: likelihood ratio tests.

$x_1, \dots, x_{kn}$ als niet stochastisch te beschouwen, ook al zijn ze dat in werkelijkheid wel. ⁴⁾

- b) De grootheden $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ zijn onderling onafhankelijk verdeeld met dezelfde (onbekende) spreiding σ_i .

Zijn a) en b) vervuld, dan zijn de kleinste kwadraten-schattingen voor $\beta_1, \dots, \beta_k$ de beste lineaire zuivere ⁵⁾ schattingen, in die zin, dat ze onder alle mogelijke zuivere lineaire schattingen de kleinste spreiding bezitten. Voor deze spreidingen zijn dan eveneens zuivere schattingen beschikbaar.

- c) De grootheden $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ bezitten een normale verdeling.

De onderstellingen a), b) en c) kunnen wij samenvatten tot:

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ zijn, voor ieder stel waarden x_{ij} , onderling onafhankelijk normaal verdeeld met gemiddelde 0 en spreiding σ_i (kort: $\underline{v}_i \rightarrow N(0; \sigma_i) ; i = 1, \dots, n$). Is dit vervuld dan zijn de kleinste kwadraten-schattingen meest aannemelijke schattingen, terwijl de gebruikelijke toetsen (F -toets en toets van STUDENT) gelden en λ -toetsen zijn.

1.3 In het artikel van DURBIN en WATSON (1950, 1951) wordt nu een toets ontwikkeld om één dezer onderstellingen te controleren, nl. dat $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ onderling onafhankelijk verdeeld zijn (onderstelling b)), waarbij als alternatief speciaal de mogelijkheid van kettingcorrelatie (correlatie tussen opvolgende waarnemingen voor y dus tussen $\underline{v}_i$ en $\underline{v}_{i-1} ; i = 2, 3, \dots$) wordt geschouwd. In par. 3 geven wij een nauwkeurigere formulering van de beschouwde alternatieven. Van de onderstellingen a) en c) wordt aangenomen, dat ze vervuld zijn.

Bestaat er een correlatie (van willekeurige aard) tussen de waarnemingen, dan blijven de kleinste kwadraten-schattingen der β 's weliswaar zuiver, maar ze behoeven niet meer de kleinste spreiding te bezitten in vergelijking met andere zuivere lineaire schattingen; bovendien kunnen de spreidingen van deze schattingen onderschat worden en kunnen de t - en F -toetsen hun geldigheid verliezen.

4) Men werkt in dat geval voorwaardelijk, onder de voorwaarde der gevonden waarden $x_1, \dots, x_{kn}$ van $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{kn}$.

5) Engels: unbiased.

1.4. Bij het beschrijven van de toets zullen wij enkele begrippen uit de matrixtheorie en over het onderscheidingsvermogen van een toets nodig hebben. Zie hiervoor par. 2.

Verder zullen wij in dit rapport geen afleidingen en bewijzen opnemen, maar alleen de resultaten van DURBIN en WATSON beschrijven en aan een voorbeeld toelichten.

2. Begrippen uit de matrixtheorie en het onderscheidingsvermogen van een toets.

2.1. Voor de verschillende optredende matrices zullen wij de volgende afkortingen invoeren:

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix}; \quad y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}.$$

De vergelijkingen (1;2) kunnen wij nu samenvatten tot:

$$(2;1) \quad y = X\beta + v.$$

Men kan nu afleiden dat voor de kleinste kwadraten-schattingen voor $\beta_1, \dots, \beta_k$, welke wij met $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ aangeven, geldt:

$$(2;2) \quad \underline{b} = (X'X)^{-1}X'y \quad \text{met} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_k \end{pmatrix}.$$

Een geaccentueerde letter geeft de getransponeerde matrix aan (deze ontstaat door verwisseling van rijen en kolommen uit de oorspronkelijke). De exponent -1 geeft inversie van de matrix aan.

De afwijkingen tussen de waarnemingen en de bijbehorende regressiewaarden worden gegeven door:

$$\underline{z} = y - X\underline{b}, \quad \text{waarin dus} \quad \underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

en worden de residuen genoemd. Hieruit kunnen wij door substitutie met behulp van (2;2) en (2;1) afleiden

$$\underline{z} = \{I_n - X(X'X)^{-1}X'\} y = \{I_n - X(X'X)^{-1}X'\} v = M v.$$

I_n stelt hierin de eenheidsmatrix van de orde n voor. De matrix M hangt dus alleen af van de matrix X of, in de terminologie van DURBIN en WATSON, van de regressievectoren $x_1, \dots, x_k$ (dit zijn de kolommen uit X). Zoals te verwachten is, wordt voor de toetsingsgrootheid een functie van $\underline{z}$ genomen.

2.2. In het volgende zullen wij nog gebruik maken van eigenwaarden en eigenvectoren van matrices. De eigenwaarden van een vierkante matrix Θ zijn de oplossingen van de vergelijking

$$\text{determinant } (\Theta - \lambda I_n) = 0,$$

dus van

$$\begin{vmatrix} \theta_{11} - \lambda & \theta_{12} & \dots & \theta_{1n} \\ \theta_{21} & \theta_{22} - \lambda & \dots & \theta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n1} & \theta_{n2} & \dots & \theta_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dit is een n^{e} graadsvergelijking met dus n oplossingen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Wij bekijken nu bij één van de oplossingen b.v. λ_1 het vergelijkingenstelsel

$$\begin{cases} (\theta_{11} - \lambda_1) u_1 + \dots + \theta_{1n} u_n = 0 \\ \vdots \\ \theta_{n1} u_1 + \dots + (\theta_{nn} - \lambda_1) u_n = 0. \end{cases}$$

Dit stelsel homogene lineaire vergelijkingen heeft, omdat zijn coëfficiënten-determinant nul is, een andere dan de nul oplossing. Deze andere oplossing noemen wij nu de eigenvector van de matrix Θ bij de eigenwaarde λ_1 .

2.3. Het onderscheidingsvermogen van een toets t.o.v. een bepaalde alternatieve hypothese kunnen wij definiëren als de kans dat de toets leidt tot verwerping van de nulhypothese, indien deze alternatieve hypothese juist is. Een toets is uniform meest onderscheidend, indien zijn onderscheidingsvermogen, dus de kans op verwerping van de nulhypothese, voor alle toegelaten alternatieve hypothesen groter is dan van alle andere mogelijke toetsen. Alléén éézijdige toetsen (toegelaten alternatieven; òf positieve correlatie òf negatieve correlatie) kunnen in stricte zin uniform meest onderscheidend zijn. Een uit twee éézijdige samengestelde symmetrische tweezijdige toets is in dat geval uniform meest onderscheidend t.o.v. een iets beperktere klasse van toetsen, nl. t.o.v. die toetsen waarbij de eerste afgeleide van het onderscheidingsvermogen naar ρ_1 (de correlatiecoëfficiënt van x_1 en x_{1+}) voor $\rho = 0$ continu is en gelijk aan nul. Het onderscheidingsvermogen bezit dan een horizontale raaklijn bij $\rho = 0$ en de toets wordt zuiver genoemd.

3. Toegelaten hypothesen en toetsingsgrootheid.

3.1. In par. 1.3 werd er reeds op gewezen, dat wij slechts een bepaalde soort correlatie tussen de waarnemingen beschouwen, namelijk die waarbij er een correlatie tussen opeenvolgende waarnemingen bestaat, waar geen correlatie of althans een minder belangrijke correlatie tussen verder van elkaar gelegen waarnemingen. Dergelijke correlaties treden in het bijzonder op, indien de volgende relaties gelden:

$$(3;1) \quad \underline{v}_i = \rho \underline{v}_{i-1} + \underline{u}_i, \quad i = 2, \dots, n,$$

waarin $|\rho| < 1$ en $\underline{u}_i$ onafhankelijk van $\underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i-2}, \dots$ en van $\underline{u}_{i-1}, \underline{u}_{i-2}, \dots$ verdeeld is. Dit model vormt de grondslag voor de toets, waarbij bovendien ondersteld wordt, dat de $\underline{u}_i$ $N(0; \sigma)$ -verdeeld is.

De waarschijnlijkheidsdichtheid van $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ wordt, wanneer wij van (3;1) uitgaan, gegeven door:

$$(3;2) \quad K \exp \left\{ -(2\sigma^2)^{-1} \left[(1+\rho^2) \sum_{i=1}^n \underline{v}_i^2 - \rho^2 \underline{v}_n^2 - 2\rho \sum_{i=2}^n \underline{v}_i \underline{v}_{i-1} \right] \right\}.$$

De hypothese die wij willen toetsen (geen correlatie) is nu dus: $\rho = 0$; de alternatieven waartegen wij toetsen kunnen, afhankelijk van het probleem dat wij behandelen, zijn hetzij $\rho > 0$ (positieve correlatie), hetzij $\rho < 0$ (negatieve correlatie), hetzij $\rho > 0$ en $\rho < 0$ dus $\rho \neq 0$.

3.2. De door DURBIN en WATSON ontwikkelde toets is op de volgende stelling van T.W. ANDERSON (1948) gebaseerd. Wij bekijken weer het regressiemodel (in matrixnotatie):

$$y = X\beta + \underline{v},$$

en maken de volgende onderstellingen:

1) de verdelingsdichtheid van $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ wordt gegeven door

$$(3;3) \quad K \exp \left[-(2\sigma^2)^{-1} \left\{ (1-\rho^2) \sum \underline{v}_i^2 - 2\rho \underline{v}' \Theta \underline{v} \right\} \right],$$

waarin Θ een willekeurige bekende niet-singuliere symmetrische matrix voorstelt waar ρ niet in voorkomt, en

2) Er zijn k eigenvectoren van Θ , waaruit ieder der regressievectoren $x_1, \dots, x_k$ (de kolommen van X) door lineaire combinatie te vormen is.

Onder deze onderstellingen heeft ANDERSON een uniform meest onderscheidende toets in de zin van par. 2.3 afgeleid voor de hypothese $\rho = 0$. De toetsingsgrootte voor deze toets heeft de gedaante

$$(3;4) \quad \underline{z} = (\underline{z}' \underline{z})^{-1} \underline{z}' \Theta \underline{z} ,$$

of een monotone functie hiervan. Wij merken nog op, dat onderstelling 2) een zeer **ernstige** beperking betekent, zodra wij de regressievectoren niet zelf kunnen bepalen. Voor een willekeurig regressiesysteem is dus de toets met toetsingsgrootte (3;4) in het algemeen niet uniform meest onderscheidend. Dit betekent echter niet, dat de toets dan zijn geldigheid verliest. De onbetrouwbaarheid ervan wordt niet door onderstelling 2) beheerst, docht slechts door 1). Alleen is er, als 2) niet vervuld is, in principe voor sommige alternatieven een toets met groter onderscheidingsvermogen te vinden.

3.3. Om de stelling van ANDERSON toe te passen op het door ons beschouwde geval zullen wij dus Θ zo moeten kiezen, dat de verdelingsdichtheid (3;3) met (3;2) overeenstemt. Dit blijkt niet precies mogelijk te zijn, maar wel kunnen wij bereiken, dat (3;2) goed benaderd wordt, b.v. door te nemen:

$$2 \Theta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

Met deze keuze van Θ gaat (3;3) over in

$$(3;5) \quad K \exp \left[- (2\sigma^2)^{-1} \left\{ (1+\rho^2) \sum v_i^2 - \rho (v_1^2 + v_n^2) - 2\rho \sum v_i v_{i-1} \right\} \right] .$$

DURBIN en WATSON stellen nu als toetsingsgrootte de volgende functie van de bij deze Θ behorende $\underline{z}$ voor:

$$(3;6) \quad \underline{d} \stackrel{\text{def}}{=} 2(1 - \underline{z}) = \left(\sum_{i=1}^n \underline{z}_i^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^n (\underline{z}_i - \underline{z}_{i-1})^2 .$$

Deze grootte $\underline{d}$ kan zelf weer in de vorm (3;4) geschreven worden en wel als

$$(3;7) \quad \underline{\alpha} = (\underline{z}' \underline{z})^{-1} \underline{z}' A \underline{z} \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tussen $\textcircled{H}$ en A bestaat de betrekking $\textcircled{H} = \gamma_n - \frac{1}{2} A$ waaruit volgt dat $\textcircled{H}$ en A dezelfde eigenvectoren bezitten. Voor de toets met toetsingsgrootheid $\underline{\alpha}$ hebben wij nu dus de volgende eigenschap: De toets gebaseerd op $\underline{\alpha}$ is in het algemeen niet uniform meest onderscheidend (in de zin van par. 2.3), waar wel in het speciale geval dat er k eigenvectoren van A zijn, waaruit ieder der regressievectoren $x_1, \dots, x_k$ door lineaire combinatie te vormen is.⁶⁾

4. Waarschijnlijkheidsverdeling van de toetsingsgrootheid onder de nulhypothese.

4.1. Om de toets te kunnen uitvoeren, moeten de kritieke waarden voor de toetsingsgrootheid $\underline{\alpha}$ bepaald worden. Daar dit bij willekeurige regressiesystemen nogal ingewikkeld is, maken DURBIN en WATSON voor een benadering gebruik van de volgende door hen afgeleide stelling:

Tussen de kolomvectoren $\underline{z}$ en $\underline{v}$ bestaat de betrekking $\underline{z} = M \underline{v}$ met $M = \gamma_n - X(X'X)^{-1}X'$ (zie par. 2.1) zodat wij voor $\underline{\alpha}$ kunnen

6) Passen wij op de toetsingsgrootheid $\underline{\alpha}$, uitgaande van (3;7) nogmaals de stelling van ANDERSON toe, dan zien wij dat $\underline{\alpha}$ (en dus ook $\underline{\gamma}$) in dezelfde bovengenoemde speciale gevallen ($x_1, \dots, x_k$ lineaire combinaties van k eigenvectoren van A) ook een uniform meest onderscheidende toets oplevert voor $\rho=0$ in een iets gewijzigd model, dat verkegen wordt door in de verdelingsdichtheid (3;3) $\textcircled{H}$ door A te vervangen. Bij uitwerken van de matrixvermenigvuldigingen $\underline{v}' \textcircled{H} \underline{v}$ en $\underline{v}' A \underline{v}$ blijken deze verdelingsdichtheden niet dezelfde te zijn, behalve voor $\rho=0$. Hieruit volgt dus, dat $\underline{\gamma}$ (bij die speciale regressiesystemen) een uniform meest onderscheidende toets geeft in een uitgebreider model dan in de stelling van ANDERSON aangegeven wordt.

schrijven:

$$\underline{d} = (\underline{z}' \underline{z})^{-1} \underline{z}' A \underline{z} = (\underline{v}' M' M \underline{v})^{-1} \underline{v}' M' A M \underline{v}.$$

Is nu A een reële symmetrische matrix, dan bezit $M'AM$ precies $n-k$ van nul verschillende eigenwaarden en dan geldt:

1) Er is een zodanige orthogonale transformatie $\underline{v} = H \underline{\xi}$, dat $\underline{d}$ overgaat in

$$(4;1) \quad \underline{d} = \left(\sum_{i=1}^{n-k} \xi_i^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n-k} v_i \xi_i^2,$$

waarin $v_1, \dots, v_{n-k}$ de van nul verschillende eigenwaarden van $M'AM$ voorstellen.

2) Zijn s regressievectoren (dus s kolommen van $X, s \leq k$) gelijk aan lineaire combinaties van s eigenvectoren van A en rangschikken wij de eigenwaarden bij de overige $n-s$ eigenvectoren van A en alle eigenwaarden van $M'AM$ naar opklimmende grootte, dus

$$\lambda'_1 \leq \lambda'_2 \leq \dots \leq \lambda'_{n-s},$$

$$\text{resp.} \quad v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_{n-k},$$

$$\text{dan geldt:} \quad \lambda'_i \leq v_i \leq \lambda'_{i+k-s},$$

dus zeker

$$(4;2) \quad \lambda_i \leq v_i \leq \lambda_{i+k} \quad (i = 1, 2, \dots, n-k),$$

indien wij met $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alle eigenwaarden van A gerangschikt naar opklimmende grootte aangeven.

4.2. Uit deze stelling zijn een paar belangrijke gevolgtrekkingen af te leiden

1) Zijn alle regressievectoren lineaire combinaties van k eigenvectoren van A (dus dan is $s = k$) dan is

$$\lambda'_i = v_i \quad (i = 1, \dots, n-k).$$

Dit geldt dus voor het speciale geval waarin de toets uniform meest onderscheidend is.

2) Noemen wij

$$\underline{d}_L \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n-k} \xi_i^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \xi_i^2 \quad \text{en} \quad \underline{d}_u \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n-k} \xi_i^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_{i+k} \xi_i^2,$$

Dan geldt volgens (4;3) voor ieder stel waarden $\xi_1, \dots, \xi_{n-k}$:

$$\underline{d}_L \leq d \leq \underline{d}_u.$$

Met behulp van deze betrekking kunnen wij nu boven- en ondergrenzen voor de kritieke waarden van $\underline{d}$ bepalen, die onafhankelijk van de regressievector $x_1, \dots, x_k$ zijn. De verdelingen van $\underline{d}_u$ en $\underline{d}_l$, onder de getoetste hypothese, kunnen nl. met behulp van de eens en voor al te bepalen eigenwaarden λ_i van A bepaald worden en de momenten en kritieke waarden van deze verdelingen vormen dan, bij ieder regressiesysteem, grenzen voor de overeenkomstige momenten en kritieke waarden van $\underline{d}$. De verdeling van $\underline{d}$ hangt af van v_i ($i=1, \dots, n-k$) dus van de eigenwaarden van $M'AM$ en zal dus verschillend zijn bij verschillende regressiesystemen, hetgeen nauwkeurige berekening van de kritieke waarden tot een omslachtig werk maakt.

4.3. De momenten van de verdeling van $\underline{d}$ kunnen uitgedrukt worden in de eigenwaarden $v_1, \dots, v_{n-k}$ van $M'AM$. Hierbij wordt er gebruik van gemaakt, dat de grootheden ξ_i , evenals $\underline{v}_i$ onder de nulhypothese onderling onafhankelijk $N(0; \sigma)$ verdeeld zijn en dat $\underline{d}$ en $\sum \xi_i^2$ onafhankelijk zijn (E.J.G. PITMAN (1937), J. VON NEUMANN (1941)), zodat

$$\mathcal{E}(\sum v_i \xi_i^2)^s = \mathcal{E} \underline{d}^s \cdot \mathcal{E}(\sum \xi_i^2)^s$$

of

$$\mathcal{E} \underline{d}^s = [\mathcal{E}(\sum \xi_i^2)^s]^{-1} \cdot \mathcal{E}(\sum v_i \xi_i^2)^s.$$

Voor de momenten van $\underline{d}$ vindt men dan:

$$(4;3) \quad \begin{cases} \mathcal{E} \underline{d} = (n-k)^{-1} \sum_{i=1}^{n-k} v_i = \bar{v}, \\ \sigma^2\{\underline{d}\} = \mu_2 = 2[(n-k)(n-k+2)]^{-1} \sum_{i=1}^{n-k} (v_i - \bar{v})^2, \\ \mu_3 = 8[(n-k)(n-k+2)(n-k+4)]^{-1} \sum_{i=1}^{n-k} (v_i - \bar{v})^3, \\ \text{enz.} \end{cases}$$

Om de momenten van $\underline{d}$ te berekenen is het dus voldoende de sommen van machten van de v_i te kennen (dus $\sum v_i$, $\sum v_i^2$, $\sum v_i^3$ enz.).

4.4. Daar de eigenwaarden van matrix A (3;7) bekend zijn (VON NEUMANN (1941)):

$$(4;4) \quad \lambda_j = 2\left(1 - \cos \frac{\pi(j-1)}{n}\right), \quad j = 1, \dots, n,$$

kunnen met behulp van de formules uit 4;3 de momenten van $\underline{d}_l$ en $\underline{d}_u$ ééns en voor al berekend worden, waarna verdelingen kunnen worden aangepast (DURBIN en WATSON gebruiken hiervoor reeksen van onvolledige B -functies).

De resultaten van hun berekeningen hebben zij in drie tabellen samengevat, die echter in de eerste plaats geschikt gemaakt zijn voor het geval, dat één der regressievectoren uitsluitend uit éénen bestaat. Dit betekent, dat één der β 's (die wij β_0 zullen noemen) voor iedere i met de factor 1 voorkomt, dus dat (1;2) overgaat in

$$(4;5) \quad y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_{k'} x_{k'i} + v_i \quad (k' = k-1).$$

In dat geval is de s uit de stelling uit 4.1 minstens gelijk aan 1. De kleinste eigenwaarde, λ_1 , van A is nl. volgens (4;4) gelijk aan 0. Voor deze eigenwaarde is dus $A - \lambda_1 \tilde{Y}_n = A$ en men ziet gemakkelijk in, dat het product van A en een kolomvector met alleen éénen, gelijk aan 0 is. Dit betekent, dat de regressievector van β_0 gelijk is aan de bij $\lambda_1 = 0$ behorende eigenvector van A . Zijn $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ alle eigenwaarden van A , dan doet nu dus, volgens stelling 2) van 4.1 de eigenwaarde λ_1 niet mee. De grenzen voor v_i worden dus:

$$(4;6) \quad \lambda_{i+k'} \leq v_i \leq \lambda_{i+k} = \lambda_{i+k'+1}.$$

De tabellen 1, 2 en 3 geven voor onbetrouwbaarheidsdrempels 0,05; 0,025 en 0,01 en voor $k' = 1, 2, \dots, 5$ en $n = 15(1) 40(5) 100$, de bij $s=1$ behorende kritieke waarden van $\underline{d}_L$ en $\underline{d}_u$. De kritieke waarde van $\underline{d}$ ligt dus tussen deze twee grenzen.

4.5. Is er geen regressievector van uitsluitend éénen, zodat het model niet in de vorm (4;5) gebracht kan worden, dan zijn de tabellen niet direct van toepassing. Men kan dan echter een constante term β_0 gaan toevoegen en deze parameter (die = 0 is) als een onbekende parameter behandelen. Dit betekent, dat men enige informatie (nl. dat $\beta_0 = 0$ is) prijs geeft, hetgeen dus het onderscheidingsvermogen van de toets vermindert. De tabellen kunnen dan echter onveranderd gebruikt worden, waarbij dan k' de waarde van k uit (1;2) aanneemt.

Deze vorm van de tabellen is gekozen, omdat het geval (4;5) in de praktijk vaker voorkomt dan het meer algemene model (1;2). Waren de tabellen voor het algemene geval gemaakt, dan zou toepassing op (4;5) tot een verlies aan onderscheidingsvermogen geleid hebben, daar men dan geen gebruik zou kunnen maken van de wetenschap, dat s in dat geval minstens gelijk aan 1 is.

Door de toevoeging van β_0 aan het model zullen ook de kleinste kwadraten schattingen voor de overige regressiecoëfficiënten gewijzigd worden. Het is echter niet nodig alle berekeningen opnieuw uit te voeren. Zijn de schattingen $B_1, \dots, B_{k'}$ voor de coëfficiënten $\beta_1, \dots, \beta_{k'}$ volgens model (1;2) bepaald (met de formules (2;2)) dan kan men met de volgende formules van DURBIN en WATSON de schattingen $b_1, \dots, b_{k'}$ behorende bij model (4;5), die dus voor de uitvoering van de toets gebruikt moeten worden, berekenen:

$$(4;7) \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{k'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_{k'} \end{pmatrix} - n B_0 C \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_{k'} \end{pmatrix}$$

waarin

$$(4;8) \quad C = (X'X)^{-1}$$

is. Deze matrix is reeds berekend bij de bepaling van $B_1, \dots, B_{k'}$; de elementen van C zullen wij met c_{ij} aangeven. Verder is

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= n^{-1} \sum_{i=1}^n x_{1i} \\ &\vdots \\ \bar{x}_{k'} &= n^{-1} \sum_{i=1}^n x_{k'i} \\ \bar{y} &= n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned}$$

en

$$(4;9) \quad B_0 = \left[\sum_{i=1}^{k'} \sum_{j=1}^{k'} c_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j - 1 \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{k'} B_i \bar{x}_i - \bar{y} \right].$$

5. Gebruik van de tabellen

5.1. Bij een gegeven serie waarnemingen waaraan model 4;5 aangepast wordt, zijn nu volgens deze tabellen, afhankelijk van de uit de waarnemingen berekende waarde van d , drie verschillende uitslagen van de toets mogelijk. Geven wij nl. de kritieke waarden van d_L en d_u , die bij de gegeven waarden van n en k' en bij de gekozen onbetrouwbaarheid uit de tabellen volgen, aan met d'_L resp. d'_u dan is de uitslag voor de eenzijdige toets tegen positieve correlatie

- 1) als $d < d'_L$ is: verwerping van de nulhypothese, $\rho = 0$, ten gunste van $\rho > 0$.

- 2) als $d'_L \leq d \leq d'_u$ is: de toets eindigt onbeslist en
- 3) als $d'_u < d$ is: de nulhypothese wordt niet verworpen.

5.2. Voor de toets tegen negatieve correlatie merken wij op, dat de toetsingsgrootheid d beperkt is tot het interval $(0,4)$ immers volgens de uitdrukking (4;1) voor d is $v_1 \leq d \leq v_{n-k-1}$, zodat dus, gezien de grenzen voor v_1 geldt $\lambda_1 \leq d \leq \lambda_n$ waarin, volgens (4;4) $\lambda_1 = 0$ en $\lambda_n < 4$, waarbij λ_n de grens 4 voor grote n dicht benadert. Verder blijkt d bijna symmetrisch verdeeld te zijn. Als gevolg hiervan kunnen wij tegen negatieve correlatie toetsen door in plaats van d de waarde $4-d$ te bepalen en op deze waarde de toets tegen positieve correlatie als in 5.1 toe te passen.

5.3. De tweezijdige toets, dus met als mogelijke alternatieven zowel $\rho > 0$ als $\rho < 0$, ontstaat door combinatie van de toetsen uit 5.1 en 5.2. De onbetrouwbaarheid wordt hierbij de som van de onbetrouwbaarheden van de ééNZijdige toetsen. De mogelijke uitslagen van de toets zijn nu:

- 1) $d < d'_L$ of $4-d < d'_L$: de hypothese $\rho = 0$ wordt verworpen,
- 2) $d'_u < d$ of $d'_u < 4-d$: de hypothese $\rho = 0$ wordt niet verworpen en
- 3) alle andere gevallen: de toets eindigt onbeslist.

In geval 1) ligt dus d buiten het interval $(d'_L, 4-d'_L)$, in geval 2) ligt d binnen het interval $(d'_u, 4-d'_u)$.

5.4. Is de toets onbeslist geëindigd dan kan nog een nader onderzoek worden uitgevoerd door de verdeling van d te benaderen met een B -verdeling, welke benadering voldoende nauwkeurig is voor voldoende grote n ($n > 40$). Op deze benadering komen wij in paragraaf 7 nog terug.

6. Een voorbeeld

Wij zullen als toelichting op de uitvoering van de toets een voorbeeld bespreken dat DURBIN en WATSON in het tweede deel van hun artikel geven. Bij dit voorbeeld bestaan de gegevens uit een serie waarnemingen voor de grootheden y , x_1 en x_2 . Deze grootheden werden per jaar waargenomen gedurende 69 jaar. Er wordt nu verondersteld, dat tussen deze waarnemingen lineaire betrekkingen bestaan van de vorm

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, 69),$$

waarin β_0 , β_1 en β_2 onbekende constanten zijn. Wij definiëren:

$$\bar{y} = n^{-1} \sum_{i=1}^{69} y_i, \quad \bar{x}_1 = n^{-1} \sum_{i=1}^{69} x_{1i} \quad \text{en} \quad \bar{x}_2 = n^{-1} \sum_{i=1}^{69} x_{2i}.$$

Om de toets tegen kettingcorrelatie uit te voeren en om de regressiecoëfficiënten β_1 en β_2 te schatten, zijn de volgende sommen berekend:

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 5,000$$

$$\sum_{i=2}^{69} (y_i - y_{i-1})^2 = 0,113$$

$$\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 = 0,632$$

$$\sum (x_{1i} - x_{1i-1})^2 = 0,024$$

$$\sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = 2,966$$

$$\sum (x_{2i} - x_{2i-1})^2 = 0,084$$

$$\sum (y_i - \bar{y})(x_{1i} - \bar{x}_1) = -1,322$$

$$\sum (y_i - y_{i-1})(x_{1i} - x_{1i-1}) = 0,015$$

$$\sum (y_i - \bar{y})(x_{2i} - \bar{x}_2) = -3,764$$

$$\sum (y_i - y_{i-1})(x_{2i} - x_{2i-1}) = -0,076$$

$$\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) = 1,015$$

$$\sum (x_{1i} - x_{1i-1})(x_{2i} - x_{2i-1}) = 0,001.$$

Voor de kleinste kwadraten-schattingen, b_1 en b_2 , voor β_1 resp. β_2 gelden nu overeenkomstige formules als in 2.1 werden gegeven bij model (2;1), indien wij de matrices X en y definiëren door

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 & x_{21} - \bar{x}_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{1n} - \bar{x}_1 & x_{2n} - \bar{x}_2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 - \bar{y} \\ \vdots \\ y_n - \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Nu is

$$(X'X) = \begin{pmatrix} \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 & \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) \\ \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) & \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,632 & 1,015 \\ 1,015 & 2,966 \end{pmatrix}$$

met

$$\text{determinant } (X'X) = 0,045,$$

zodat dus

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{0,045} \begin{pmatrix} 2,966 & -1,015 \\ -1,015 & 0,632 \end{pmatrix}.$$

Verder is

$$(X'y) = \begin{pmatrix} \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)(y_i - \bar{y}) \\ \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)(y_i - \bar{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,322 \\ -3,764 \end{pmatrix}$$

waaruit volgt:

$$(X'X)^{-1}X'y = \begin{pmatrix} -0,120 \\ -1,228 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

dus

$$b_1 = -0,120 \quad \text{en} \quad b_2 = -1,228.$$

De kleinste kwadraten-schatting voor β_0 is $b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2$.
De residuen z_i hebben dus de gedaante

$$z_i = y_i - (\bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i}) = y_i - \bar{y} - b_1 (x_{1i} - \bar{x}_1) - b_2 (x_{2i} - \bar{x}_2).$$

Om de toetsingsgrootte

$$d = [\sum z_i^2]^{-1} \cdot \sum (z_i - z_{i-1})^2$$

te berekenen, bepalen wij:

$$\sum z_i^2 = \sum (y_i - \bar{y})^2 - b_1 \sum (y_i - \bar{y})(x_{1i} - \bar{x}_1) - b_2 \sum (y_i - \bar{y})(x_{2i} - \bar{x}_2)$$

(deze formule volgt uit die voor z_i door gebruik te maken van de uitdrukkingen (2;2) voor b_1 en b_2) en

$$\begin{aligned} \sum (z_i - z_{i-1})^2 &= \sum (y_i - y_{i-1})^2 + b_1^2 \sum (x_{1i} - x_{1i-1})^2 + b_2^2 \sum (x_{2i} - x_{2i-1})^2 + \\ &\quad - 2 b_1 \sum (y_i - y_{i-1})(x_{1i} - x_{1i-1}) - 2 b_2 \sum (y_i - y_{i-1})(x_{2i} - x_{2i-1}) + \\ &\quad + 2 b_1 b_2 \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2). \end{aligned}$$

Wij vinden $\sum z_i^2 = 0,221$ en $\sum (z_i - z_{i-1})^2 = 0,055$ zodat $d = 0,249$ is.

In ons voorbeeld is $n=69$ en $k'=2$, bij een onbetrouwbaarheid 0,05 vinden wij hierbij voor de kritieke waarden van de grenzen voor d : $d'_L = 1,55$ en $d'_u = 1,67$. Willen wij de nulhypothese (geen correlatie) toetsen tegen positieve correlatie, dan zullen wij dus, daar $d \ll d'_L$, de nulhypothese verwerpen. Ook indien wij toetsen met onbetrouwbaarheid 0,01 ($d'_L = 1,40$) voert de toets tot verwerping van de nulhypothese.

Willen wij bij een onbetrouwbaarheid 0,05 de nulhypothese (geen correlatie) toetsen tegen de alternatieven positieve of negatieve correlatie (dus tweezijdig), dan kunnen wij dit bereiken door zowel de toets tegen positieve correlatie als de toets tegen negatieve correlatie, beide met onbetrouwbaarheid 0,025 uit te voeren. Volgens 5.3. komt dit neer op het bepalen van de intervallen $(d'_L, 4 - d'_L)$ en $(d'_u, 4 - d'_u)$.

In ons geval zouden deze zijn $(1,48; 2,52)$ en $(1,60; 2,40)$. Een waarde van $\underline{d}$ buiten het eerste interval leidt dan tot verworping van de nulhypothese. Voor kleine n en grote k' kan het voorkomen, dat $d'_u > 2$; in dit geval is er geen interval waarvoor geldt, dat wanneer $\underline{d}$ in dit interval ligt, de toets tot niet verwerpen van de nulhypothese voert, de toets heeft dan dus slechts twee mogelijke uitkomsten: of de nulhypothese wordt verworpen of de toets eindigt onbeslist.

7. Verdere behandeling voor onbesliste gevallen

In die gevallen waarin de toets uit de vorige paragrafen niet tot een beslissing over de nulhypothese voert, wordt een benadering voor de verdeling van $\underline{d}$ gegeven, die het mogelijk maakt de kritieke waarden voor $\underline{d}$ zelf te benaderen. Deze benadering is echter alleen voor grote n ($n > 40$) nauwkeurig.

In paragraaf 4.3. zagen wij reeds dat de momenten van de verdeling van $\underline{d}$ uitgedrukt kunnen worden in sommen van machten van de eigenwaarden, ν_i , van de matrix $M'AM$. Nu zijn deze sommen weer gelijk aan sporen ⁷⁾ van matrices die wij met behulp van de matrices X en A kunnen berekenen. Wij zullen dit niet afleiden, maar geven alleen de resultaten voor het eerste en tweede moment:

$$(7;1) \quad \mathcal{E}\{\underline{d}\} = (n - k' - 1) \cdot P$$

en

$$(7;2) \quad \sigma^2\{\underline{d}\} = 2 \left[(n - k' - 1)(n - k' + 1) \right]^{-1} \left[Q - P \cdot \mathcal{E}\{\underline{d}\} \right],$$

waarin

$$P = \text{sp } A - \text{sp} [X'AX(X'X)^{-1}]$$

en

$$Q = \text{sp } A^2 - 2 \text{sp} [X'A^2X(X'X)^{-1}] + \text{sp} [X'AX(X'X)^{-1}]^2.$$

Hierbij maken wij gebruik van het volgende:

$$\text{sp } A = 2(n-1)$$

$$\text{sp } A^2 = 2(3n-4) = \text{som van kwadraten van alle elementen van } A.$$

7) Het spoor van een vierkante matrix is de som van de elementen op zijn hoofddiagonaal.

Het (j, ℓ) -de element van $X'AX$ is $\sum_{i=2}^n (x_{ji} - x_{j,i-1})(x_{\ell i} - x_{\ell,i-1})$,
 deze hebben wij dus reeds berekend voor de bepaling van d .

Het (j, ℓ) -de element van $X'A^2X$ is, met goede benadering, gelijk
 aan de som van de producten van de tweede verschillen van x_j en
 x_ℓ . Precies:

$$\sum_{i=3}^n \Delta^2 x_{ji} \Delta^2 x_{\ell i} + (x_{j1} - x_{j2})(x_{\ell 1} - x_{\ell 2}) + (x_{jn-1} - x_{jn})(x_{\ell n-1} - x_{\ell n}),$$

wanneer wij de eerste en tweede verschillen van de x -en aangeven
 met resp.:

$$\Delta x_{ji} = x_{ji} - x_{j,i-1}$$

en

$$\Delta^2 x_{ji} = \Delta x_{ji} - \Delta x_{j,i-1}.$$

In 5.2 vermeldten wij al dat d beperkt is tot het interval
 $(0; 4)$. Daarom wordt, als benadering, met de eerste twee momenten
 voor $d/4$ een B -verdeling aangepast. Wij onderstellen dus dat
 de verdelingsdichtheid van $d/4$ gegeven wordt door

$$[B(p, q)]^{-1} (d/4)^{p-1} (1 - d/4)^{q-1}$$

($B(p, q)$ is de volledige beta-functie), zodat dus

$$\mathcal{E}\{d\} = 4p(p+q)^{-1}$$

$$\sigma^2\{d\} = 16pq[(p+q)^2(p+q+1)]^{-1}$$

waaruit met behulp van (7;1) en (7;2) te berekenen zijn

$$p+q = \mathcal{E}\{d\} (4 - \mathcal{E}\{d\}) [\sigma^2\{d\}]^{-1} - 1$$

en

$$p = (p+q) \cdot \mathcal{E}\{d\} / 4.$$

Om kritieke waarden voor d te bepalen met deze aangepaste
 verdeling kunnen de tabellen van CATHERINE THOMPSON (1941) ge-
 bruikt worden of de tabellen van de F -verdeling met $2q$ en $2p$
 vrijheidsgraden, waarbij

$$F = p(4-d)/(q d).$$

Zijn $2p$ en $2q$ niet geheel, dan zijn volgens CARTER (1947) de
 kritieke waarden van

$$z = (1/2) \ln F \quad (\text{natuurlijke logaritmie})$$

bij benadering gelijk aan

$$h^{-1} \left\{ \sqrt{h+\lambda} - \left[(1/2q) - (1/2p) \right] \left[\lambda + (5/6) - (s/3) \right] \right\}$$

waarin

$$S = (1/2 p) + (1/2 q) ; h = 2/s \quad \text{en} \quad \lambda = (\xi^2 - 3)/6$$

is en, bij onbetrouwbaarheden $\alpha = 0,05$ en $\alpha = 0,01$, ξ en λ gegeven worden door:

α	0,05	0,01
ξ	1,6449	2,3263
λ	0,0491	0,4020

De toets tegen negatieve correlatie loopt volkomen analoog wanneer wij overal d door $4 - d$ vervangen (hierdoor worden dus p en q gewijzigd ($\xi\{4 - d\} = 4 - \xi d$ en $\sigma^2\{4 - d\} = \sigma^2\{d\}$)).

8. Opmerkingen

8.1. Wil men de beschreven toets van DURBIN en WATSON toepassen op een geval waarbij de onafhankelijke variabelen bekende functies zijn van de tijd (vooral wanneer dit monotone functies zijn), dan moet enige voorzichtigheid bij de interpretatie van de uitslag van de toets betracht worden. Immers gaat men in een dergelijk geval van een minder geschikt regressiemodel uit (b.v. van $\xi y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i(t)$ terwijl het model $\xi y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i(t) + \beta_2 x_i^2(t)$ beter geweest zou zijn), dan zullen groepen van naburige waarnemingspunten (die dus ook wat de tijd betreft "naburig" zijn) gezamenlijk boven of onder de aangepast regressielijn liggen. Voor de toetsingsgrootheid d zal dan een kleinere waarde optreden dan men met een betere aanpassing gevonden zou hebben. Het resultaat is dat, volgens de toets, tot positieve correlatie besloten wordt, waar in werkelijkheid wellicht alleen van slechte aanpassing sprake is of dat een eventuele negatieve ketting-correlatie door de slechte aanpassing nu niet meer gevonden wordt. Bij regressiemodellen als deze verdient het dan ook aanbeveling indien mogelijk eerst de aanpassing te onderzoeken (b.v. met de χ^2 -toets, of met een andere toets, die op sommen van gekwadrateerde residuen berust) en pas als deze bevredigend is de toets op ketting-correlatie uit te voeren.

Bestaat er geen direct functioneel verband tussen de tijd en de onafhankelijke variabelen, dan zal men in het algemeen van deze moeilijkheid geen last hebben.

3.2. Nadat dit artikel reeds gereed gekomen was, bereikte ons een artikel van E.J. HANNAN (1955) waarin een exacte toets tegen kettingcorrelatie tussen de residuen bij regressieanalyse wordt gegeven, gebaseerd op de Z -toets. Deze toets berust op een kunstgreep, die bestaat uit het verdelen van de waarnemingen in twee gelijke groepen, nl. die met even en die met oneven rangnummer in de beschouwde volgorde.

Literatuur

- T.W. ANDERSON (1948), On the theory of testing serial correlation. Skand. Aktuarietidskrift, 31, pp. 88-115.
- A.H. Carter (1947), Approximation to percentage points of the z -distribution. Biometrika, 34, pp. 352-358.
- J. DURBIN and G.S. WATSON, (1950, 1951), Testing for serial correlation in least squares regression.
I Biometrika, 37 (1950), pp. 409-423.
II Biometrika, 38 (1951), pp. 159-173.
- E.J. HANNAN (1955), Exact tests for serial correlation. Biometrika, 42, pp. 133-142.
- J. VON NEUMANN (1941), Distribution of the mean square successive difference to the variance. Annals of Math. Stat., 12, pp. 367-395.
- E.J.G. PITMAN (1937), The closest estimates of statistical parameters. Proc. Camb. Phil. Soc., 33 pp. 212-222.
- C.M. THOMPSON (1941), Tables of percentage points of the incomplete Beta-function and of the χ^2 -distribution. Biometrika, 32, pp. 151-181 en 187-191.
-

Tabel 1

Kritieke waarden van d_L en d_u . Onbetrouwbaarheid 0,05

n	$k'=1$		$k'=2$		$k'=3$		$k'=4$		$k'=5$	
	d_L	d_u	d_L	d_u	d_L	d_u	d_L	d_u	d_L	d_u
15	1,06	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79
39	1,43	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,43	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,49	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

Tabel 2

Kritieke waarden van d_L en d_u . Onbetrouwbaarheid 0,025

n	$k' = 1$		$k' = 2$		$k' = 3$		$k' = 4$		$k' = 5$	
	d_L	d_u	d_L	d_u	d_L	d_u	d_L	d_u	d_L	d_u
15	0,95	1,23	0,83	1,40	0,71	1,61	0,59	1,84	0,48	2,09
16	0,98	1,24	0,86	1,40	0,75	1,59	0,64	1,80	0,53	2,03
17	1,01	1,25	0,90	1,40	0,79	1,58	0,68	1,77	0,57	1,98
18	1,03	1,26	0,93	1,40	0,82	1,56	0,72	1,74	0,62	1,93
19	1,06	1,28	0,96	1,41	0,86	1,55	0,76	1,72	0,66	1,90
20	1,08	1,28	0,99	1,41	0,89	1,55	0,79	1,70	0,70	1,87
21	1,10	1,30	1,01	1,41	0,92	1,54	0,83	1,69	0,73	1,84
22	1,12	1,31	1,04	1,42	0,95	1,54	0,86	1,68	0,77	1,82
23	1,14	1,32	1,06	1,42	0,97	1,54	0,89	1,67	0,80	1,80
24	1,16	1,33	1,08	1,43	1,00	1,54	0,91	1,66	0,83	1,79
25	1,18	1,34	1,10	1,43	1,02	1,54	0,94	1,65	0,86	1,77
26	1,19	1,35	1,12	1,44	1,04	1,54	0,96	1,65	0,88	1,76
27	1,21	1,36	1,13	1,44	1,06	1,54	0,99	1,64	0,91	1,75
28	1,22	1,37	1,15	1,45	1,08	1,54	1,01	1,64	0,93	1,74
29	1,24	1,38	1,17	1,45	1,10	1,54	1,03	1,63	0,96	1,73
30	1,25	1,38	1,18	1,46	1,12	1,54	1,05	1,63	0,98	1,73
31	1,26	1,39	1,20	1,47	1,13	1,55	1,07	1,63	1,00	1,72
32	1,27	1,40	1,21	1,47	1,15	1,55	1,08	1,63	1,02	1,71
33	1,28	1,41	1,22	1,48	1,16	1,55	1,10	1,63	1,04	1,71
34	1,29	1,41	1,24	1,48	1,17	1,55	1,12	1,63	1,06	1,70
35	1,30	1,42	1,25	1,48	1,19	1,55	1,13	1,63	1,07	1,70
36	1,31	1,43	1,26	1,49	1,20	1,56	1,15	1,63	1,09	1,70
37	1,32	1,43	1,27	1,49	1,21	1,56	1,16	1,62	1,10	1,70
38	1,33	1,44	1,28	1,50	1,23	1,56	1,17	1,62	1,12	1,70
39	1,34	1,44	1,29	1,50	1,24	1,56	1,19	1,63	1,13	1,69
40	1,35	1,45	1,30	1,51	1,25	1,57	1,20	1,63	1,15	1,69
45	1,39	1,48	1,34	1,53	1,30	1,58	1,25	1,63	1,21	1,69
50	1,42	1,50	1,38	1,54	1,34	1,59	1,30	1,64	1,26	1,69
55	1,45	1,52	1,41	1,56	1,37	1,60	1,33	1,64	1,30	1,69
60	1,47	1,54	1,44	1,57	1,40	1,61	1,37	1,65	1,33	1,69
65	1,49	1,55	1,46	1,59	1,43	1,62	1,40	1,66	1,36	1,69
70	1,51	1,57	1,48	1,60	1,45	1,63	1,42	1,66	1,39	1,70
75	1,53	1,58	1,50	1,61	1,47	1,64	1,45	1,67	1,42	1,70
80	1,54	1,59	1,52	1,62	1,49	1,65	1,47	1,67	1,44	1,70
85	1,56	1,60	1,53	1,63	1,51	1,65	1,49	1,68	1,46	1,71
90	1,57	1,61	1,55	1,64	1,53	1,66	1,50	1,69	1,48	1,71
95	1,58	1,62	1,56	1,65	1,54	1,67	1,52	1,69	1,50	1,71
100	1,59	1,63	1,57	1,65	1,55	1,67	1,53	1,70	1,51	1,72

Tabel 3

Kritieke waarden van d_L en d_u . Onbetrouwbaarheid 0,01

n	$k' = 1$		$k' = 2$		$k' = 3$		$k' = 4$		$k' = 5$	
	d_L	d_u	d_L	d_u	d_L	d_u	d_L	d_u	d_L	d_u
15	0,81	1,07	0,70	1,25	0,59	1,46	0,49	1,70	0,39	1,96
16	0,84	1,09	0,74	1,25	0,63	1,44	0,53	1,66	0,44	1,90
17	0,87	1,10	0,77	1,25	0,67	1,43	0,57	1,63	0,48	1,85
18	0,90	1,12	0,80	1,26	0,71	1,42	0,61	1,60	0,52	1,80
19	0,93	1,13	0,83	1,26	0,74	1,41	0,65	1,58	0,56	1,77
20	0,95	1,15	0,86	1,27	0,77	1,41	0,68	1,57	0,60	1,74
21	0,97	1,16	0,89	1,27	0,80	1,41	0,72	1,55	0,63	1,71
22	1,00	1,17	0,91	1,28	0,83	1,40	0,75	1,54	0,66	1,69
23	1,02	1,19	0,94	1,29	0,86	1,40	0,77	1,53	0,70	1,67
24	1,04	1,20	0,96	1,30	0,88	1,41	0,80	1,53	0,72	1,66
25	1,05	1,21	0,98	1,30	0,90	1,41	0,83	1,52	0,75	1,65
26	1,07	1,22	1,00	1,31	0,93	1,41	0,85	1,52	0,78	1,64
27	1,09	1,23	1,02	1,32	0,95	1,41	0,88	1,51	0,81	1,63
28	1,10	1,24	1,04	1,32	0,97	1,41	0,90	1,51	0,83	1,62
29	1,12	1,25	1,05	1,33	0,99	1,42	0,92	1,51	0,85	1,61
30	1,13	1,26	1,07	1,34	1,01	1,42	0,94	1,51	0,88	1,61
31	1,15	1,27	1,08	1,34	1,02	1,42	0,96	1,51	0,90	1,60
32	1,16	1,28	1,10	1,35	1,04	1,43	0,98	1,51	0,92	1,60
33	1,17	1,29	1,11	1,36	1,05	1,43	1,00	1,51	0,94	1,59
34	1,18	1,30	1,13	1,36	1,07	1,43	1,01	1,51	0,95	1,59
35	1,19	1,31	1,14	1,37	1,08	1,44	1,03	1,51	0,97	1,59
36	1,21	1,32	1,15	1,38	1,10	1,44	1,04	1,51	0,99	1,59
37	1,22	1,32	1,16	1,38	1,11	1,45	1,06	1,51	1,00	1,59
38	1,23	1,33	1,18	1,39	1,12	1,45	1,07	1,52	1,02	1,58
39	1,24	1,34	1,19	1,39	1,14	1,45	1,09	1,52	1,03	1,58
40	1,25	1,34	1,20	1,40	1,15	1,46	1,10	1,52	1,05	1,58
45	1,29	1,38	1,24	1,42	1,20	1,48	1,16	1,53	1,11	1,58
50	1,32	1,40	1,28	1,45	1,24	1,49	1,20	1,54	1,16	1,59
55	1,36	1,43	1,32	1,47	1,28	1,51	1,25	1,55	1,21	1,59
60	1,38	1,45	1,35	1,48	1,32	1,52	1,28	1,56	1,25	1,60
65	1,41	1,47	1,38	1,50	1,35	1,53	1,31	1,57	1,28	1,61
70	1,43	1,49	1,40	1,52	1,37	1,55	1,34	1,58	1,31	1,61
75	1,45	1,50	1,42	1,53	1,39	1,56	1,37	1,59	1,34	1,62
80	1,47	1,52	1,44	1,54	1,42	1,57	1,39	1,60	1,36	1,62
85	1,48	1,53	1,46	1,55	1,43	1,58	1,41	1,60	1,39	1,63
90	1,50	1,54	1,47	1,56	1,45	1,59	1,43	1,61	1,41	1,64
95	1,51	1,55	1,49	1,57	1,47	1,60	1,45	1,62	1,42	1,64
100	1,52	1,56	1,50	1,58	1,48	1,60	1,46	1,63	1,44	1,65